

TÉMA: OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA ALGEBRAICA DE POLINOMIOS.

En la práctica para sumar dos o más polinomios suelen colocarse unos debajo de los otros, de tal modo que los términos semejantes queden en columna, para facilitar la reducción de éstos, separados unos de otros con sus respectivos signos.

Ejemplos: Hallar las sumas:

- a) $3a + 2b - c$ con $2a + 3b + c$. De acuerdo con lo indicado se tiene.

$$\begin{array}{r} 3a + 2b - c \\ 2a + 3b + c \\ \hline 5a + 5b \end{array}$$

observe que $-c$ y $+c$ da como resultado cero. Por eso no se escribe el resultado.

- b) $5ab - 3bc + 4cd$, $2bc + 2cd - 3de$, $4bc - 2ab + 3de$ y $-3bc - 6cd - ab$. Ordenando y colocándolos en columna los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 5ab - 3bc + 4cd \\ 2bc + 2cd - 3de \\ -2ab + 4bc + 3de \\ -ab - 3bc - 6cd \\ \hline 2ab \end{array}$$

ten en cuenta que al sumar términos semejantes los signos son bien importantes porque ellos son los que dicen si las cantidades se suman o restan. Si tenemos $5ab - 2ab - ab$. Se procede así: se suman los que tengan el mismo signo que son: $-2ab$ y $-ab$ y esto nos da: $-3ab$ ($-2 - 1 = -3$) como el $5ab$ es positivo se resta con $-3ab$ y el resultado es: $2ab$ positivo porque el 5 es el mayor y es positivo.

¿Por qué los otros resultados no aparecen? Porque dan cero. Así:

$-3bc$ se suman con $-3bc$ y da como resultado $-6bc$, luego se suman $2bc$ con $4bc$ (porque ambos son positivos) y da como resultado $6bc$. Estos dos resultados: $-6bc$ y $6bc$ por tener signos diferentes se restan y da cero. Lo mismo sucede con los otros términos del polinomio.

RESTA ALGEBRAICA DE POLINOMIOS

Cuando el **sustraendo** es un polinomio, hay que restar del **minuendo** cada uno de los términos del sustraendo, así que a continuación del **minuendo escribiremos el sustraendo cambiándose el signo a todos sus términos**. La resta se realiza de igual manera que la suma de polinomios, teniendo en cuenta los signos si son iguales estos se suman los términos y si los signos son contrarios se restan en todo caso el signo de la respuesta depende del término que tenga mayor valor absoluto.

- a) De $a + b$ restar $a - b$. Ordenando:

$$\begin{array}{r} a + b \text{ este es el minuendo} \\ -a + b \text{ este es el sustraendo (observa que al sustraendo que es el polinomio que está a continuación de} \\ 2b \text{ la expresión restar se le cambian los signos.} \end{array}$$

Observa que $a - a$ es igual a 0 (cero). Porque una a es positiva y la otra negativa.

- b) Restar $-3x + 2y + 7z$ De $4x - 3y - 2z$. Ordenando, se tiene:

$$\begin{array}{r} 4x - 3y - 2z \text{ minuendo} \\ 3x - 2y - 7z \text{ sustraendo y por eso se le cambiaron los signos.} \\ \hline 7x - 5y - 9z \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN

Multiplicación de monomios. Para multiplicar un monomio por otro, se empieza por aplicar la regla de los signos para la multiplicación, después se multiplican los coeficientes y finalmente las variables; si éstas son todas diferentes se colocan unas a continuación de las otras con sus propios exponentes y sin signos intermedios. Cuando intervienen potencias con la misma base, se escribe la misma base y se suman los exponentes.

Ejemplos:

a) $(ab)(ab) = a^2 b^2$

b) $(-9a^3bc^2)(8d^4e^2g^4) = -72a^3bc^2d^4e^2g^4$

c) $(3a^5x^2)(-5ay^3) = -15a^6x^2y^3$ (observa que la variable "a" queda con exponente 6 porque a la "a" del primer monomio tiene como exponente 5 y este se suma con el exponente de la "a" del segundo monomio que como no le aparece es 1. Y al sumar $5 + 1 = 6$)

Multiplicación de un polinomio por un monomio. Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica el monomio por todos y cada uno de los términos del polinomio, tomando en cuenta la ley de los signos, y se suman algebraicamente los resultados.

Ejemplos:

a) Multiplicar: $3x^3 - x^2 + 2x - 4$ y $-2x^2$
 $-2x^2(3x^3 - x^2 + 2x - 4) = -6x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 8x^2$

b) Multiplicar $5a^3b^4c^6 - 12ab^8c - 6a^9c^5$ por $-3a^2bc$
 $-3a^2bc(5a^3b^4c^6 - 12ab^8c - 6a^9c^5) = -15a^5b^5c^6 + 36a^3b^9c^2 + 18a^{11}bc^6$

Multiplicación de polinomios.

Para multiplicar un polinomio por otro, se multiplican todos y cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro, teniendo en cuenta la regla de los signos, y se suman algebraicamente los resultados; finalmente se hace la correspondiente reducción de términos semejantes.

Ejemplos:

a) Multiplicar: $x^3 + 2x^2 - 5x$ por $-x + 2x^2 - 5$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x \\ \underline{2x^2 - x - 5} \\ 2x^5 + 4x^4 - 10x^3 \\ \quad -x^4 - 2x^3 + 10x^2 \\ \quad \quad - 5x^3 - 10x^2 + 25x \\ \hline 2x^5 + 3x^4 - 17x^3 \qquad + 25x \end{array}$$

b) Multiplicar: $X^2 + y^2 - xy$ por $X^2 + 3y^2 + xy$

$$\begin{array}{r} X^2 - xy + y^2 \\ \underline{X^2 + xy - 3y^2} \\ x^4 - x^3y + x^2y^2 \\ \quad x^3y - x^2y^2 + xy^3 \\ \quad \quad -3x^2y^2 + 3xy^3 - 3y^4 \\ \hline x^4 \quad - 3x^2y^2 + 4xy^3 - 3y^4 \end{array}$$

División de expresiones algebraicas:

Primero recordemos como se dividen dos monomios:

Para **dividir dos monomios** debes tener en cuenta cómo se **dividen potencias de la misma base**. En general, $a^m \div a^n = a^{m-n}$
Por ejemplo, si quieres dividir los monomios $24x^4y^2z^3$ y $8xy$, no tienes más que dividir por un lado los coeficientes, y por el otro las variables o letras:

$$\frac{24x^4y^2z^3}{8xy} = \frac{24}{8} x^{4-1}y^{2-1}z^3 = 3x^3y^1z^3 = 3x^3yz^3$$

Otro ejemplo de divisiones de monomios son:

$-15x^3y^4z^2 \div 5x^2y^2z = -3xy^2z$ El cociente de los dos monomios da como resultado otro monomio.
El **cociente de dos monomios** (cuando es posible) es igual a otro monomio que tiene:

- Como **coeficiente**, el cociente de los coeficientes de los monomios dados.
- Como **parte literal**, la expresión que resulta de realizar todas las divisiones de potencias de igual base

Veamos ahora la división entre polinomio y monomio:

En general, la **división de un polinomio entre un monomio** es posible cuando todos los términos del polinomio sean divisibles por el monomio.

Por ejemplo:

$$\frac{12x^2yz - 8xy^2}{2xy} = \frac{12x^2yz}{2xy} - \frac{8xy^2}{2xy} = 6xz - 4y$$

Nótese que para dividir un polinomio entre un monomio cada término del polinomio se divide entre el monomio y luego se realizan las divisiones entre los monomios resultantes.

$$\frac{15x^3y^8z + 20x^2y^6z^4 - 15xy^4z^5}{5xy^4z} = \frac{15x^3y^8z}{5xy^4z} + \frac{20x^2y^6z^4}{5xy^4z} - \frac{15xy^4z^5}{5xy^4z} = 3x^2y^4 + 4xy^2z^3 - 3z^4$$

Ahora practica cada uno de los ítems explicados anteriormente.

DESARROLLAR CADA UNO DE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

1- SUMAR LOS SIGUIENTES POLINOMIOS:

- 1) $-am+6mn-4s$; $6s-am-5mn$; $-2s-5mn+3am$.
- 2) $6m-3n$; $-4n+5p$; $-m-5p$.
- 3) $2x-3y$; $5z+9$; $6x-4$; $3y-5$.
- 4) $7x+2y-4$; $9y-6z+5$; $-y+3z-6$; $-5+8x-3y$.
- 5) $5ax - 3am-7an$; $-8ax+5an-9am$; $-11ax+5am+16an$.
- 6) $a + 1 - 7m^a$; $2 - 5m^{a+3}$; $4m^{a-7}a + 2$; $-7m^{a+3}$; $-5m^{a+1} + 3a$; $-12m^a + a$
- 7) $5x+y+z+u$; $-3x-4y - 2z+3u$; $4x+5y+3z-4u$; $-9x-y+z+2u$.
- 8) $a + b - c + d$; $a - b + c - d$; $-2a + 3b - 2c + d$; $-3a - 3b + 4c - d$.
- 9) $5ab - 3bc+4cd$; $2bc+2cd-3de$; $4bc-2ab+3de$; $-3bc-6cd-ab$.
- 10) $a-b$; $b-c$; $c + d$; $a - c$; $c - d$; $d - a$; $a - d$.
- 11) $x^3+xy^2+y^3$; $-5x^2y+x^3-y^3$; $2x^3-4xy^2-5y^3$.
- 12) $-7m^2n+4n^8$; $m^3+6mn^2-n^3$; $-m^3+7m^2n+5n^3$.
- 13) x^4-x^2+x ; x^3-4x^2+5 ; $7x^2-4x+6$.
- 14) a^4+a^3+6 ; a^5-3a^3+8 ; a^5-a^3-14
- 15) x^5+x-9 ; $3x^4-7x^2+6$; $-3x^3-4x+5$.
- 16) a^3+a ; a^2+5 ; $7a^2+4a$; $-8a^2-6$.
- 17) $x^4-x^2y^2$; $-5x^8y+6xy^3$; $-4xy^3+y^4$; $-4x^2y^2-6$.

2- Restar los siguientes polinomios

- 1) De $x^3 - x^2 + 6$ restar $5x^2 - 4x + 6$.
- 2) restar $2y^2 - 3y + 6$. De $y^2 + 6y + 18$
- 3) De $a^3 - 6ab^2 + 9a$ restar $15a^2b - 8a + 5$.
- 4) restar $-8x^3y - 6x^2y^2 + 20y^4$ De $x^4 + 9xy^3 - 11y^4$.
- 5) De $a + b + c - d$ restar $-a - b + c - d$.
- 6) restar $-4ac + 8ab - 5cd + 5de$. De $ab + 2ac - 3cd - 5de$
- 7) De $x^3 - 9x + 6x^2 - 19$ restar $-11x^2 + 21x - 43 + 6x^3$.
- 8) restar $-11y^4 + 31y^3 - 8y^2 - 19y$. De $y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31$
- 9) De $5m^3 - 9n^3 + 6m^2n - 8mn^2$ restar $14mn^2 - 21m^2n + 5m^3 - 18$.
- 10) restar $-x^4 - 51xy^3 + 32x^2y^2 - 25x^3y$ De $4x^3y - 19xy^3 + y^4 - 6x^2y^2$
- 11) De $m^6 + m^4n^2 - 9m^6n^4 + 19$ restar $-13m^3n^3 + 16mn^5 - 30m^2n^4 - 61$.
- 12) restar $-8a^6 + 9b^6 - 11a^4b^2 - 11a^2b^4$ De $-a^5b + 6a^3b^3 - 18ab^5 + 42$

3- Multiplicar los siguientes monomios:

- 1) 2 por -3.
- 2) -15 por 16.
- 3) $2x^2$ por $-3x$.
- 4) $-5x^3y$ por xy^2 .
- 5) -4 por -8.
- 6) ab por $-ab$.
- 7) $-4a^2b$ por $-ab^2$.
- 8) a^2b^3 por $3a^2x$.

4- Resolver las siguientes multiplicaciones

- 1) Multiplicar $x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ por $-4x^2$
- 2) Multiplicar $am^3 + 3am^2 - 4am + 5m$ por $-am^2$.
- 3) Multiplicar $a^6 - 6a^3x + 9a^2x^2 - 8$ por $3bx^3$.
- 4) Multiplicar $x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 7x + 5$ por $-3a^2x^3$.
- 5) Multiplicar $-3x^3 + 11x^2y - 7xy^2 - 4y^3$ por $5a^2xy^2$.

5- Multiplicar :

1. $x^2 + xy + y^2$ por $x - y$.
2. $a^2 + b^2 - 2ab$ por $a - b$.
3. $a^2 + b^2 + 2ab$ por $a + b$.
4. $X^3 - 3x^2 + 1$ por $x + 3$.
5. $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ por $2x + 3$.
6. $3y^3 + 5 - 6y$ por $y^2 + 2$.
7. $m^3 - m^2 + m - 2$ por $am + a$.
8. $3a^2 - 5ab + 2b^2$ por $4a - 5b$.
9. $a^2 + a + 1$ por $a^2 - a - 1$.

6- Dividir :

- 1) -24 entre 8.
- 2) -63 entre -7.
- 3) $-5a^2$ entre $-a$.
- 4) $14a^3b^4$ entre $-2ab^2$.
- 5) $-a^3b^4c$ entre a^3b^4 .
- 6) $-a^2b$ entre $-ab$.
- 7) $54x^2y^2z^3$ entre $-6xy^2z^3$
- 8) $-5m^2n$ entre m^2n .
- 9) $-8a^2x^3$ entre $-8a^2x^3$
- 10) $-xy^2$ entre $2y$
- 11) $5x^4y^5$ entre $-6x^4y$.
- 12) $-a^6b^8c^4$ entre $8c^4$.
- 13) $16m^8n^4$ entre $-5n^3$
- 14) $-108a^7bec^3$. Entre $-20bec^8$

Dividir:

- 1- $a^2 - ab$ entre a .
- 2- $3x^2y^3 - 5a^2x^4$ entre $-3x^2$.
- 3- $3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3$ entre $-2a$.
- 4- $x^3 - 4x^2 + x$ entre x .
- 5- $4x^8 - 10x^6 - 5x^4$ entre $2x^3$.
- 6- $6m^3 - 8m^2n + 20mn^2$ entre $-2m$.
- 7- $6a^8b^8 - 3a^7b^9 - a^2b^3$ entre $3a^2b^3$.
- 8- $x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x$ entre $-5x$
- 9- $8m^9n^2 - 10m^7n^4 - 20m^5n^8 + 12m^3n^3$ entre $2m^2$.
- 10- $a^x + a^{m-1}$ entre a^2 .
- 11- $2a^m - 3a^{n+2} + 6a^{m+4}$ entre $-3a^3$.
- 12- $a^m b^n + a^{m-1} b^{n+2} - a^{m-2} b^{m+4}$ entre $a^2 b^8$.
- 13- $x^{m+2} - 5x^m + 6x^{m+1} - x^{m-1}$ entre x^{m-2} .
- 14- $4a^{x+4} b^{m-1} - 6a^{x+a} b^{m-2} + 8a^{x+2} b^{m-8}$.
Entre $-2a^{x+2} b^{m-4}$.